Μαθημα 14ο 8|4|2016

Αναλυτικη Γεωμετρια

Ασκηση 7

Να βρεθει η γωνια των $(\pi_1): 2x-2y+3z-1=0$ και $(\pi_2): -2x+2y-3z+17=0$

1η λυση:

$\frac{2}{-2}=\frac{-2}{2}=\frac{3}{-3}\neq\frac{-1}{17}$ δηλ $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}\neq\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \Rightarrow (\pi_1)//(\pi_2)$

$\Rightarrow \theta=0$

2η λυση

Η γωνια(π_1,π_2) = γωνια$(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$ οπου $\underset{(2,-2,3)}{\vec{n}_1} \perp (\pi_1)$ και $\underset{(-2,2,-3)}{\vec{n}_2} \perp (\pi_2) \Rightarrow$

$\cos\varphi=\frac{\langle\vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{2(-2)+2(-2)+3(-3)}{\sqrt{4+4+9}\cdot\sqrt{4+4+9}}=-\frac{17}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}}=-1 \Rightarrow \varphi=\pi$

Ασκηση 8

Να βρεθει η αποσταση των $(\pi_1): x-y+z-2=0$ και $(\pi_2): \overset{A}{2}x-\overset{B}{2}y+\overset{\Gamma}{2}z-\overset{\Delta}{3}=0$

$d(\pi_1,\pi_2)=d(P,\pi_2)$, $P\in(\pi_1)$ για συγκεκριμενο σημειο $P\in(\pi_1)$

αρκει π.χ $x=0$, $y=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow$ το $(\underset{x_0}{0},\underset{y_0}{0},\underset{z_0}{2})\in(\pi_1)$

$=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}=\frac{|2\cdot 0+(-2)\cdot 0+2\cdot 2+(-3)|}{\sqrt{4+4+4}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$

Ασκηση 9

Να βρεθει η εξισωση επιπεδου το οποιο ειναι παραλληλο στο (π): $2x-3y-6z-14=0$ εχει αποσταση 5 απο την αρχη των αξονων και το σημειο $P(1,1,1)$ ανηκει στο θετικο ημιχωρο αυτου

Εστω (π'): $\overset{2}{A}x+\overset{-3}{B}y+\overset{-6}{\Gamma}z+\Delta=0$ το ζητουμενο επιπεδο

Καθως $(\pi')\parallel(\pi)$ το (π') εχει τη μορφη $2x-3y-6z+\Delta=0$

το $d((0,0,0),\pi')=5 \Rightarrow \dfrac{|2\cdot 0+(-3)\cdot 0+(-6)\cdot 0+\Delta|}{\sqrt{4+9+36}}=5 \Rightarrow$

$|\Delta|=5\cdot 7 \Rightarrow |\Delta|=35 \Rightarrow \Delta=\pm 35$

Αρα το (π'): $2x-3y-6z+35=0$ $(\Delta=35)$

ή

$2x-3y-6z-35=0$ $(\Delta=-35)$

Εφοσον $P_1 \in$ (θετικο ημιχωρο του π') τοτε $Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta>0$

Συνεπως (π'): $2x-3y-6z+35=0$ αφου $2\cdot 1-3\cdot 1-6\cdot 1+35>0$

Ασκηση 10

Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που ειναι παραλληλο στο $\underbrace{\text{επιπεδο } xz}_{y=0}$ {Δεν υπαρχει το y}

και απεχει 4 μοναδες απο αυτο {Ομοιο με την πανω με αλλα λογια}

$A=0,\ B=1,\ \Gamma=0,\ \Delta=0$

Το ζητουμενο επιπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \parallel y=0$ $(\Rightarrow 0x+1\cdot y+0z+0=0)$

Ένα επιπεδο παραλληλο με αυτο θα ειναι το $0x+y+0z+\Delta=0 \overset{(\pi')}{\Rightarrow} y+\Delta=0,\ \Delta\neq 0$

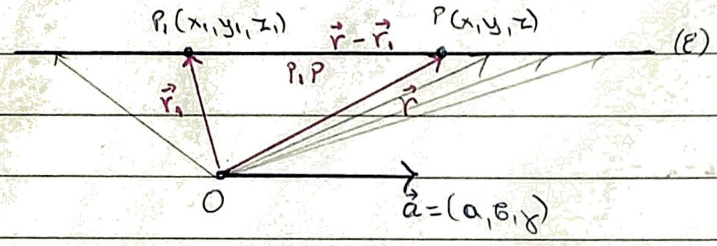
Ενα σημειο του (π') ειναι το $P(0,-\Delta,0)\in(\pi')$

$d(\pi,\pi')=d(P,\pi) \Rightarrow \dfrac{|0\cdot 0+1\cdot(-\Delta)+0\cdot 0+0|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}}=4 \Rightarrow \Delta=\pm 4$

Αρα το επιπεδο ειναι $y\pm 4=0$

Ευθεια

Σε ενα ορθοκανονικο συστημα $Oxyz$ μια ευθεια προσδιοριζεται πληρως αν γνωριζουμε σημειο της (ε) $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και ενα διανυσμα $\vec{a} = (a, \beta, \gamma) \parallel (\varepsilon)$



Παρατηρουμε οτι $\underset{\overrightarrow{P_1P}}{\vec{r}-\vec{r}_1} \parallel \vec{a} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* : \vec{r}-\vec{r}_1 = \lambda \cdot \vec{a} \Rightarrow \underbrace{\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a}}$ (*)

Διανυσματικη εξισωση της (ε) διερχομενη απο το $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και // σε διανυσμα $\vec{a}$

Η εξισωση (*) μου προσδιοριζει για τα διαφορα λ τα διανυσματα θεσης της ευθειας

Εστω $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{a} = (a, \beta, \gamma)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + \lambda \cdot a \\ y = y_1 + \lambda \cdot \beta \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + \lambda \cdot \gamma \end{cases}$$ Παραμετρικες εξισωσεις ευθειας

$\Downarrow$

$x - x_1 = \lambda a$

$y - y_1 = \lambda \beta$ Αν $a\beta\gamma \neq 0 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{\beta} = \dfrac{z-z_1}{\gamma}}$

$z - z_1 = \lambda \gamma$

Αναλυτικες Εξισωσεις της (ε) που διερχεται απο το (x_1, y_1, z_1) και $\parallel (a, \beta, \gamma)$

Παρατηρηση

Αν $\alpha=0$ ή $\beta=0$ ή $\gamma=0$ $\Rightarrow$ υποχρεωτικα $x=x_1$ ή $y=y_1$ ή $z=z_1$

Παραδειγμα

(1) η ευθεια που διερχεται απο το $P_1(1,2,2)$ και ειναι $\parallel \vec{a}=(1,1,2)$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}$$

$x-1=y-2$ $\qquad$ $2y-4=z-2$

$x-y+1=0$

Οποτε $\Rightarrow \{x-y+1=0,\ 2y-z-2=0\}$

(2) (ε) $P_1(1,2,3)$, και $\parallel(1,0,2)$

(ε): $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{2} \Rightarrow \left\{y-2=0 \text{ και } \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{z-3}{2}\right.$

$\Downarrow$

$y-2=0$

$y=2,\quad 2x-z+1=0\}$

(*) Πραγματι μια ευθεια εκφραζεται ως τομη δυο επιπεδων

$\alpha\beta\gamma\neq0$ (ε): $\dfrac{x-x_1}{\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\beta}=\dfrac{z-z_1}{\gamma}$

$\beta x-\alpha y-\beta x_1+\alpha y_1=0$ $\qquad$ $\gamma y-\beta z-\gamma y_1+\beta z_1=0$

$(\pi_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$, $(\pi_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$

Και αντιστροφα αν $(\pi_1),(\pi_2)$ δυο επιπεδα που τεμνονται η τομη τους ειναι ευθεια.

$\Downarrow$

$\pi_1 \not\parallel \pi_2 \Rightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2$;

οπου $\vec{n}_1=(A_1,B_1,\Gamma_1)\perp(\pi_1)$ $\qquad \Rightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2\perp\vec{n}_1\perp(\pi_1) \Rightarrow \boxed{\vec{n}_1\times\vec{n}_2\neq\vec{0}}$

$\vec{n}_2=(A_2,B_2,\Gamma_2)\perp(\pi_2)$ $\qquad \perp\vec{n}_2\perp(\pi_2)$

θυμαμαι! $\left\{\vec{a},\vec{b}\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b},\ \perp\vec{a}\right\}$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \neq (0,0,0)$$

$\Rightarrow$ τουλαχιστον μια 2×2 οριζουσα $\neq 0$

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 z + \Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 z + \Delta_2 = 0 \end{cases}$$

, θα θεσουμε $z = t$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ εχω μοναδικη λυση ως προς x, y συναρτησει του t

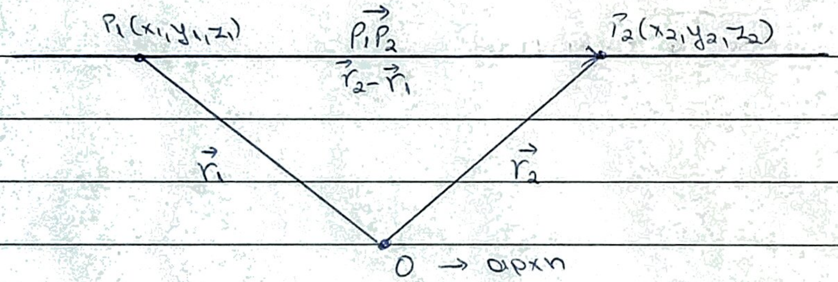
$x = \ldots + t \ldots$

$y = \ldots + t \ldots$, $t \in \mathbb{R}$

$z = 0 + t$

ευθεια!

ϐ) Προσδιορισμος ευθειας οριζομενη απο δυο σημεια της



Ψαχνουμε ευθεια η οποια διερχεται απο το $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και ειναι $\parallel$ με διανυσμα

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad ((x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1))$

$\quad\quad\quad\quad\quad = \vec{\alpha}$

στις προηγουμενες εξισωσεις απλη αντικατασταση

$\vec{\alpha} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$(\alpha, \beta, \gamma) = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

Διανυσματικη Εξισωση Ευθειας: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

Παραμετρικες Εξισωσεις ευθειας:

$x = x_1 + \lambda(x_2-x_1)$

$y = y_1 + \lambda(y_2-y_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

$z = z_1 + \lambda(z_2-z_1)$

Αναλυτικη Εξισωση ευθειας: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

Παραδειγμα

Εστω $P_1(1,2,3)$, $P_2(1,6,5)$

$$(\varepsilon)\quad \frac{x-1}{1-1} = \frac{y-2}{6-2} = \frac{z-3}{5-3}$$

$$\downarrow$$

$$\{ x=1 \quad \text{και} \quad 2y-4z+8=0 \}$$

Ευρεση Διανυσματος παραλληλο σε ευθεια

$$(\varepsilon)\begin{cases} (\pi_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1 z+\Delta_1=0 \\ (\pi_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2 z+\Delta_2=0 \end{cases}, \quad \pi_1, \pi_2 \text{ τεμνονται}$$

$(A_1, B_1, \Gamma_1) = \vec{n}_1 \perp (\pi_1)$

$(A_2, B_2, \Gamma_2) = \vec{n}_2 \perp (\pi_2)$

$$\Rightarrow \underbrace{\pi_1 \not\parallel \pi_2}_{\text{εφοσον τεμνονται}} \Rightarrow \vec{n}_1 \not\parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$$

Παρατηρουμε οτι $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \perp (\pi_1)$ $\Rightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\pi_1)(\pi_2)$

$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \perp \vec{n}_2 \perp (\pi_2)$

↳ Συγγραμμικα

$2^{ος}$ τροπος

"λυνουμε" τις εξισωσεις της (ε). Βαζουμε (π.χ $z=0$) και λυνουμε το (Σ) βρισκοντας $(x, y) = (\ \ ,\ \ )$

$\Rightarrow P_1(x_1, y_1, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{z_1}})$ σημειο της ευθειας

Αντιστοιχα (π.χ $x=0$) και λυνουμε y_2, z_2 $(\underset{\shortparallel}{\overset{0}{x_2}}, y_2, z_2)\ P_2$ $\Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \parallel (\varepsilon)$

{ γιατι βρισκεται στην (ε)
Ειναι συγγραμμικα }

Παραδειγμα

Να προσδιοριστει διανυσμα παραλληλο προς την ευθεια
$\{ x+2y+3z+4=0 , \ 2x+3y+7=0 \}$
$\quad\ (\pi_1) \qquad\qquad (\pi_2)$

1ος : $\vec{n}_1=(1,2,3) \perp (\pi_1)$ και $\vec{n}_2=(2,3,0) \perp (\pi_2)$ $\Rightarrow$ $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel (\varepsilon)$

αρα $\vec{n}_1\times\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underset{(1,0,0)}{\vec{e}_1}(2\cdot 0-3\cdot 3) - \underset{(0,1,0)}{\vec{e}_2}(1\cdot 0-2\cdot 3) + \underset{(0,0,1)}{\vec{e}_3}(1\cdot 3-2\cdot 2) =$

$=(-9,6,-1)$

2ος : Προσδιορισμος 2 σημειων της (ε)
Αρα π.χ $x=0$ $\begin{cases} 2y+3z+4=0 \\ 3y+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2/9 \\ y=-7/3 \end{cases} \Rightarrow$

το $P_1(0,-7/3,-2/9) \in (\varepsilon)$

Αντιστοιχα για $y=0$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow P_2(-7/2, 0, -1/6) \in (\varepsilon)$
Αρα $\vec{P_1P_2} = (-7/2, 7/3, -7/18) \parallel (\varepsilon)$

Γωνια δυο ευθειων

$(\varepsilon_1)\quad \vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{\alpha}$

$(\varepsilon_2)\quad \vec{r} = \vec{r_2} + \lambda \cdot \vec{\beta}$

$\text{γωνια}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \text{γωνια}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{|\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle|}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

αν $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ και $\vec{\beta} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}$$